

УДК 621.391

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ КОМПЛЕКСНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ДЛЯ ДЕМОДУЛЯЦИИ СИГНАЛОВ С ДВОИЧНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

И. Р. Ветчинкин

Оценивается мощность принимаемых фазоманипулированных сигналов и их фазовые соотношения по результатам спектрального разложения корреляционной матрицы комплексной огибающей принимаемых сигналов по собственным числам и векторам. Показана принципиальная возможность построения демодуляторов сигналов BPSK при использовании результатов указанного разложения, что подтверждается приводимыми результатами имитационного моделирования для различных отношений сигнал/помеха.

Ключевые слова: корреляционная матрица, комплексная огибающая, разложение по собственным числам и векторам, фазоманипулированные сигналы.

Keywords: correlation matrix, complex envelope, decomposition matrix on eigenvalues and eigenvectors, phase manipulation signals.

Введение

К настоящему моменту опубликовано много статей, в которых описывается возможность использования спектрального разложения корреляционной матрицы принимаемых сигналов (разложение по собственным числам и векторам) для оптимизации пространственной обработки информации в многоканальных системах, применительно к которым появилось много теоретически обоснованных алгоритмов [1–4].

Целью такой оптимизации является повышение отношения сигнал/помеха, при котором становится возможным решение поставленных задач при обработке слабых сигналов. Для этого используется вектор весовых коэффициентов, фазовые соотношения компонент которого находятся в результате обработки результатов указанного разложения.

При построении демодуляторов фазоманипулированных сигналов BPSK вопрос повышения их эффективности при обработке слабых сигналов также стоит очень остро. При этом требуется найти фазовые соотношения принимаемых сигналов, соответствующих передаваемому сообщению. Исходя из этого представляется целесообразным рассмотреть возможность использования результатов разложения корреляционной матрицы комплексной огибающей принимаемых сигналов по собственным числам и векторам для решения указанной задачи.

Модельное описание корреляционной матрицы смеси принимаемых сигналов и помех и ее спектральное разложение

Принимаемый сигнал во временной области может быть описан с помощью следующего соотношения:

$$S(t) = \operatorname{Re}\{g(t)e^{j2\pi f_0 t}\}, \quad (1)$$

где $g(t)$ — комплексная огибающая входного процесса; t и f_0 — текущее время и несущая частота.

После переноса входного сигнала в IQ-демодуляторе на нулевую частоту дальнейшей обработке подвергается комплексная огибающая, которая может быть описана как

$$g(t) = \|g(t)\|e^{j\varphi(t)}, \quad (2)$$

где $\|g(t)\|$ и $\varphi(t)$ — соответственно модуль и фаза комплексной огибающей.

Рассмотрим корреляционную матрицу комплексной огибающей (в дальнейшем матрица \mathbf{Q}), сформированную из ее временных отсчетов, следующих с интервалом дискретизации Δt . Вектор-столбец таких отсчетов обозначим, как \mathbf{X} , т. е.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

— вектор-столбец N входных отсчетов, взятых с интервалом дискретизации Δt .

Поскольку предполагается, что вектор \mathbf{X} представляет собой суммарный процесс помеховой и сигнальной составляющей, он может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{X} = \text{noise} + \text{signal} = \sqrt{N_0} \mathbf{G}_\Pi + \sqrt{S} \mathbf{V}_c, \quad (3)$$

где noise и signal — векторы размерностью $N \times 1$, описывающие соответственно шумовую и сигнальную составляющие комплексной огибающей; \mathbf{G}_Π — вектор размерностью $N \times 1$, описывающий фазовые соотношения помехи в моменты времени $1, 2, \dots, i, \dots, N$, взятые с интервалом дискретизации Δt ; \mathbf{V}_c — вектор размерностью $N \times 1$ описывающий фазовые соотношения сигнала в моменты времени $1, 2, \dots, i, \dots, N$, взятые с интервалом дискретизации Δt ; N_0 — мощность помех в комплексной огибающей; S — мощность принимаемого сигнала в комплексной огибающей.

Тогда корреляционная матрица комплексной огибающей смеси сигналов и помех размерами $N \times N$ (N — число временных отсчетов комплексной огибающей) может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X} \mathbf{X}^{*T} = N_0 \mathbf{P} + 2\sqrt{N_0} \sqrt{S} \mathbf{G}_\Pi \mathbf{V}_c^{*T} + S \mathbf{V}_c \mathbf{V}_c^{*T}, \quad (4)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{G}_\Pi \mathbf{G}_\Pi^{*T}$ — корреляционная матрица помех размерами $N \times N$; $\mathbf{V}_c \mathbf{V}_c^{*T}$ — корреляционная матрица принимаемого сигнала размерами $N \times N$.

В случае, когда число входных отсчетов N совпадает с числом отсчетов на символ передаваемой информации, вектор \mathbf{V}_c может быть описан соотношением

$$\mathbf{V}_c^T = [e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} e^{j\varphi_3} e^{j\varphi_4} \dots e^{j\varphi_N}], \quad (5)$$

где фазы каждого отсчета комплексной огибающей $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_N$ примерно равны.

В случае, когда на интервале оценки корреляционной матрицы $T = N\Delta t$ помещено несколько символов анализируемой информации, т. е. когда N много больше числа отсчетов на символ, этот вектор приобретает вид (для примера числа отсчетов на символ 3)

$$\mathbf{V}_c^T = [e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} e^{j\varphi_2} e^{j\varphi_2} e^{j\varphi_3} e^{j\varphi_3} e^{j\varphi_3} \dots e^{j\varphi_N} e^{j\varphi_N} e^{j\varphi_N}],$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ могут принимать значения либо 0, либо 180° .

Из определения собственных значений и собственных векторов корреляционной матрицы [5–7] следует, что

$$\mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{V}_i = \lambda_i \mathbf{S} \mathbf{V}_i, \quad (6)$$

где λ_i — i -е собственное значение матрицы \mathbf{Q} , а $\mathbf{S} \mathbf{V}_i$ — ее i -й собственный вектор, или

$$[N_0 \mathbf{P} + 2\sqrt{N_0} \sqrt{S} \mathbf{G}_\Pi \mathbf{V}_c^{*T} + S \mathbf{V}_c \mathbf{V}_c^{*T}] \mathbf{S} \mathbf{V}_i = \lambda_i \mathbf{S} \mathbf{V}_i. \quad (7)$$

В том случае, если мощность принимаемого сигнала значительно больше мощности помех, т. е. если $S \gg N_0$, то почти очевидно, что одно из собственных чисел корреляционной матрицы \mathbf{Q} является оценкой мощности сигнала S . При этом компоненты собственного вектора, соответствующего этому собственному значению, являются некоторой оценкой фаз каждого отсчета принимаемых колебаний, взятых с интервалом дискретизации.

Однако при этом не очевидно, что собственный вектор, соответствующий данному собственному значению корреляционной матрицы \mathbf{Q} , может быть использован для оценки фазовых соотношений принимаемых колебаний на их соответствие переданному сообщению.

Для проверки данных утверждений при различных отношениях сигнал/помеха был выполнен описанный ниже модельный эксперимент.

Модельный эксперимент по оценке фазовых соотношений принимаемых сигналов, сформированных модемом BPSK

Моделировался радиомодем BPSK, имеющий символьную скорость передачи данных 1000 МГц, работающий с частотой дискретизации 8000 МГц, что обеспечивало 8 отсчетов на передаваемый символ. Размер передаваемого алфавита равен 2 (модем BPSK), выходная мощность радиомодема — 5 Вт.

Поскольку сначала необходимо оценить принципиальную возможность использования описанного выше разложения для решения поставленной задачи (определение фазы каждой компоненты принимаемого сигнала), наибольшее отношение сигнал/помеха при проведении указанного эксперимента было выбрано 70 дБ. Такое отношение сигнал/помеха весьма значительно и не может быть использовано для оценки потенциальных возможностей алгоритма, однако оно может быть использовано для качественной оценки.

Также были проведены модельные эксперименты при отношении сигнал/помеха 20 и 15 дБ в интересах сравнительной оценки фаз каждой компоненты собственного вектора при единой входной информации, но при более низком отношении сигнал/помеха.

Помеха моделировалась в виде аддитивного белого шума с нулевым математическим ожиданием. Из временных отсчетов комплексной огибающей (в рассматриваемом примере $N = 8$) формировалась выборка временных отсчетов, следующих с интервалом дискретизации Δt , из

которых формировалась корреляционная матрица, впоследствии разлагаемая по собственным числам и векторам.

Собственные значения корреляционной матрицы, сформированной из входной выборки сигналов модема BPSK
(sz — сокращенное обозначение собственного значения)

1sz	2sz	3sz	4sz	5sz
6.1E-16	1.8E-16	1.4E-16	5.2E-17	1.2E-16
6sz	7sz	8sz		
2.0E-16	6.7E-16	4.9996		

Из анализа приведенных собственных значений видно, что все они близки к 0, кроме последнего значения, которое и будет оценкой мощности излучения рассматриваемого радиомодема, равной 5 Вт, как было указано выше. Этот пример подтверждает ранее сделанный вывод о том, что наибольшее собственное значение анализируемой матрицы является оценкой мощности принимаемого сигнала.

Для анализа фазы каждого отсчета комплексной огибающей принимаемых сигналов оценивались компоненты собственного вектора корреляционной матрицы,

соответствующего последнему собственному числу этой матрицы, сформированной из сигналов модема BPSK, которое, как уже отмечалось, определяет мощность принимаемого сигнала.

Для этого формировалась матрица размерами 32×32 , что при 8 отсчетах на символ соответствует передаче 4 символов информации (0 или 1) при отношении сигнал/помеха, равном 70 дБ (рис. 1).

На оси абсцисс левого графика на рис. 1 приведено время, в дискретные моменты которого передается сообщение, а на оси ординат — значение логического уровня передаваемого сообщения.

Для анализа фазы каждого принимаемого комплексного отсчета в более сложных помеховых ситуациях производилось моделирование при более низких отношениях сигнал/помеха (20 и 15 дБ). Диаграммы рассеяния передаваемого сообщения, логические уровни которых показаны на левом графике рис. 1, приведены на рис. 2 (для отношений сигнал/помеха 20 и 15 дБ).

На оси абсцисс и ординат рис. 2 отложено значение синфазной и квадратурной компонент обрабатываемого сообщения.

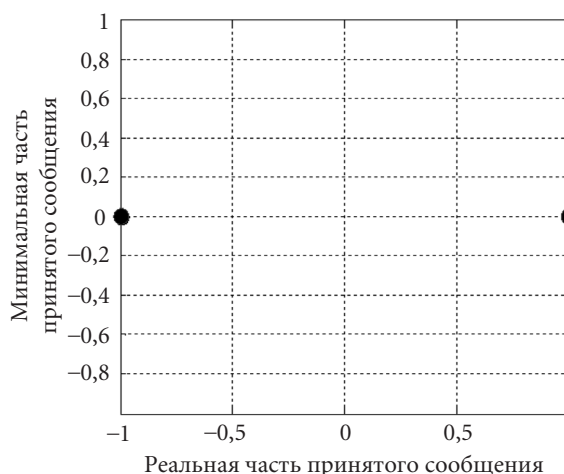
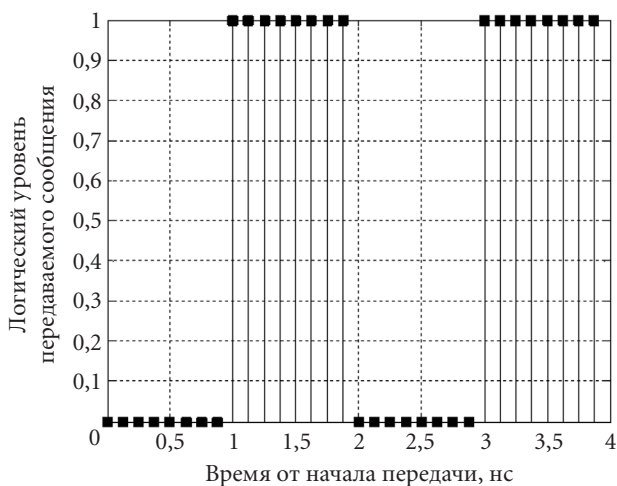


Рис. 1 Логический уровень (0 или 1), определяющий передаваемое сообщение, и его диаграмма рассеяния при отношении сигнал/помеха (E_b/N_0) = 70 дБ

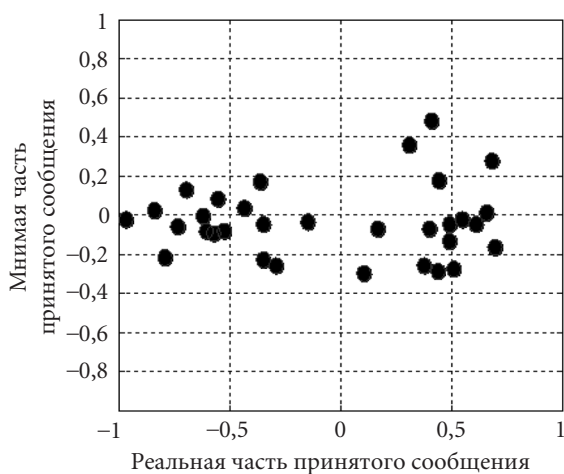
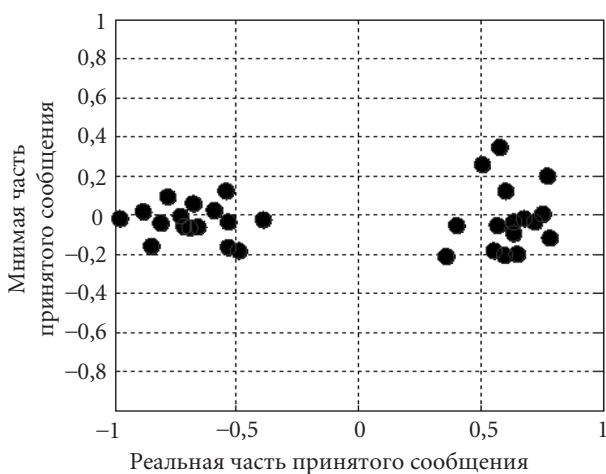


Рис. 2 Диаграммы рассеяния передаваемого сообщения при отношении сигнал/помеха 20 и 15 дБ (левый и правый график соответственно)

Анализ структуры старшего собственного вектора									
Сообщение		Модуль фазы			Сообщение		Модуль фазы		
№	Значение	$E_b/N_0 = 70$ дБ	$E_b/N_0 = 20$ дБ	$E_b/N_0 = 15$ дБ	№	Значение	$E_b/N_0 = 70$ дБ	$E_b/N_0 = 20$ дБ	$E_b/N_0 = 15$ дБ
1	0	0,8651	7,3911	11,6206	17	0	1,1568	20,5369	33,3979
2	0	0,8759	15,5560	24,6975	18	0	0,5623	16,4621	27,2426
3	0	0,8631	26,3432	48,5931	19	0	1,1649	22,4462	36,7123
4	0	0,8030	7,0286	12,8926	20	0	0,5711	30,7465	60,7656
5	0	0,9939	3,0774	9,3434	21	0	1,2543	4,1426	10,1430
6	0	0,7633	11,3978	17,8092	22	0	0,5081	15,5259	28,6194
7	0	1,0292	2,8522	5,3921	23	0	1,2608	10,0970	19,9240
8	0	0,7307	14,9574	25,4427	24	0	0,4737	11,0717	29,7354
9	1	178,9317	178,4229	178,5027	25	1	178,6801	178,1685	176,8255
10	1	179,3733	174,4515	169,3982	26	1	179,5638	174,2011	166,2438
11	1	178,9129	170,1621	166,3079	27	1	178,7249	158,6092	139,5746
12	1	179,4051	173,4195	165,8836	28	1	179,4837	140,6515	112,4997
13	1	178,8307	174,0814	167,9815	29	1	178,6649	172,5358	162,5785
14	1	179,3998	172,7568	179,6569	30	1	179,5499	157,4917	142,7931
15	1	178,7973	164,3418	132,1455	31	1	178,7108	146,4293	117,0997
16	1	179,4318	168,9888	166,4621	32	1	179,6377	176,2927	170,1900

Номер передаваемого сообщения, его значение (0 или 1), а также абсолютная величина фазы каждой компоненты анализируемого собственного вектора для трех отношений сигнал/помеха (70, 20 и 15 дБ) представлены в таблице.

Поскольку в анализируемом сообщении число отсчетов на передаваемый символ равно 8, в структуре собственного вектора это отражается в повторении фазовых соотношений соответствующих компонент, которые отмечены в таблице одинаковым цветом. Анализ таблицы показывает, что фаза каждой компоненты собственного вектора действительно является оценкой фазы сигнала, генерируемого модемом. Причем при большом отноше-

нии сигнал/помеха эта оценка повторяет переданное сообщение (рис. 3).

На оси абсцисс графиков на рис. 3 указан номер компоненты собственного вектора, а на оси ординат — значение модуля фазы этой компоненты.

Фаза первых 32 компонент анализируемого собственного вектора при отношении сигнал/помеха 15 дБ показана на левом графике рис. 4. На правом графике рис. 4 показана диаграмма рассеяния первых 32 компонент анализируемого собственного вектора.

Из анализа таблицы и рис. 3 и 4 следует, что фазы каждой компоненты анализируемого собственного вектора корреляционной матрицы дают возможность

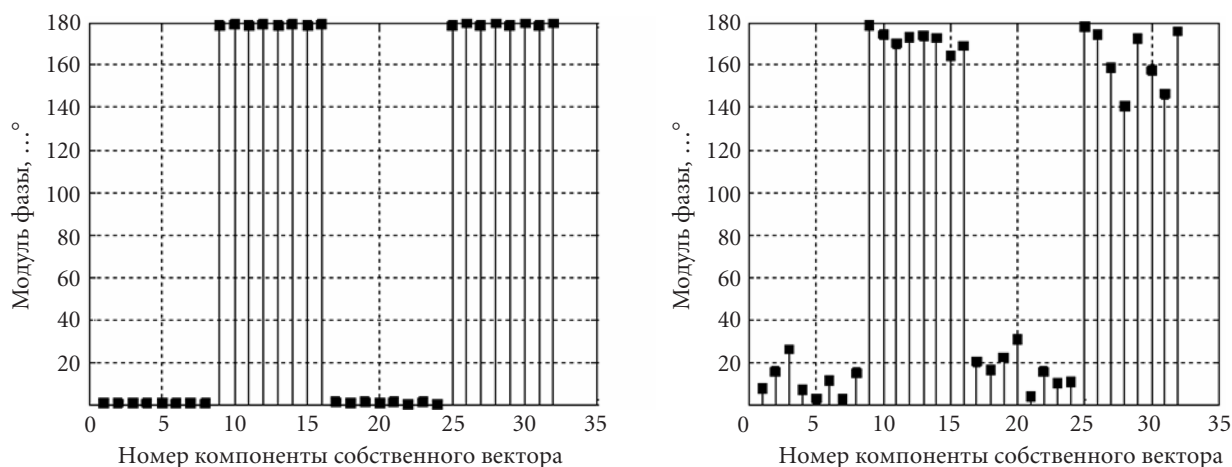


Рис. 3 Фаза первых 32 компонент анализируемого собственного вектора при отношении сигнал/помеха (E_b/N_0) 70 и 20 дБ (левый и правый график соответственно)

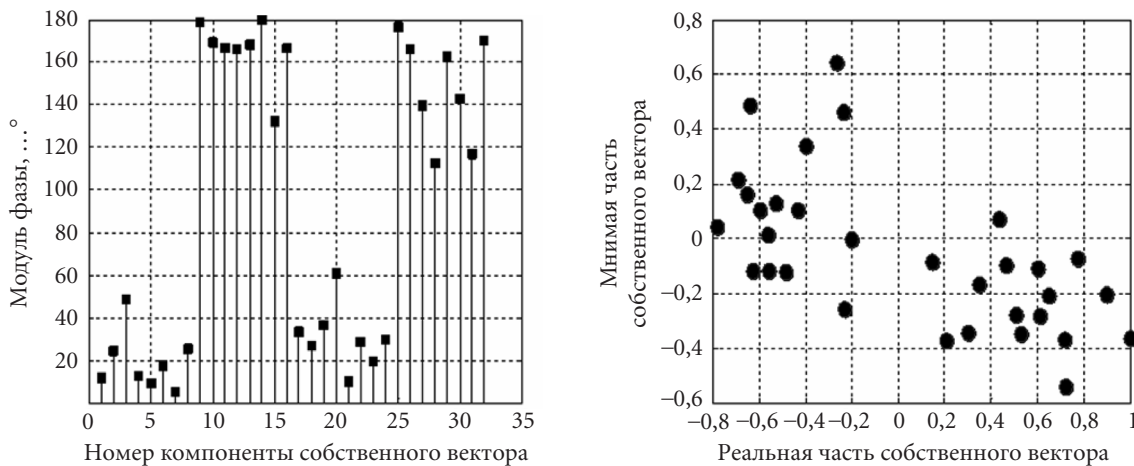


Рис. 4 Фаза первых 32 компонент анализируемого вектора при отношении сигнал/помеха (E_b/N_0) 15 дБ и его диаграмма рассеяния (левый и правый график соответственно)

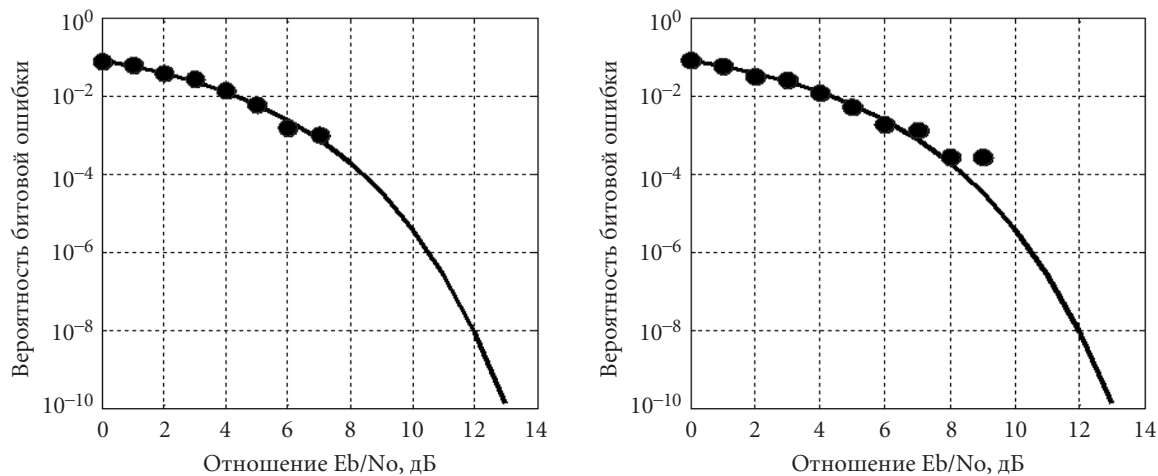


Рис. 5 Вероятность битовой ошибки при оценке принимаемого сообщения по компонентам собственного вектора корреляционной матрицы при различных отношениях сигнал/помеха (E_b/N_0) и размерах обрабатываемой матрицы 2000×2000 и 3700×3700 (левый и правый график соответственно):
 — теоретическая кривая; ● — экспериментальные данные

оценить фазовые соотношения передаваемого сообщения как при больших (70 дБ), так и при значительно более меньших (20 и 15 дБ) отношениях сигнал/помеха, что и позволяет использовать процедуру разложения этой матрицы по собственным числам и векторам при построении демодулятора фазоманипулированных сигналов.

Для оценки ошибочных решений в определении значения принимаемого битового потока была установлена вероятность появления битовой ошибки на основании оценки передаваемого сообщения по компонентам собственного вектора для различных отношений сигнал/помеха и для различных размеров обрабатываемой матрицы: 2000×2000 и 3700×3700 (рис. 5, левый и правый график соответственно).

На оси ординат графиков рис. 5 приведена вероятность битовой ошибки, а на оси абсцисс — отношение сигнал/помеха (E_b/N_0) в децибеллах, для которого эта вероятность вычислена. Сплошная линия соответствует

теоретической кривой появления ошибок при приеме сигналов BPSK, а точками показаны результаты модельного эксперимента по определению вероятности ошибки при анализе компонент собственного вектора.

Из анализа кривых, приведенных на графике рис. 5, можно сделать вывод о том, что вероятность появления ошибочного бита при оценке принимаемого сообщения по компонентам собственного вектора близка к теоретической кривой появления битовой ошибки для сигналов с модуляцией BPSK.

При этом необходимо сделать следующее замечание. Для оценки вероятности битовой ошибки при значительных отношениях сигнал/помеха требуется производить спектральное разложение корреляционных матриц больших размерностей, поскольку для оценки малых значений вероятности появления битовой ошибки требуется обработать большую выборку, в качестве которой выступает анализируемый собственный вектор длиной, напрямую связанной с размерами матрицы.

Выводы

1. В результате разложения корреляционной матрицы комплексной огибающей принимаемых сигналов по собственным числам и векторам возможно получение информации о мощности принимаемого сигнала, его фазовых соотношениях в произвольный момент времени, а также о моментах изменения фазы передаваемого сообщения, что позволяет использовать результаты этого разложения при построении демодуляторов фазоманипулированных сигналов.

2. Дальнейшие разработки должны быть направлены на определение возможности использования результатов указанного разложения для демодуляции других типов модулированных сигналов, оценки их помехоустойчивости в поле как изотропных, так и анизотропных помех, оценки параметров принимаемых сигналов, а также проработки вопросов по оценке возможности технической реализации процедур, связанных со спектральным разложением матриц больших размерностей.

Литература

1. **Reddy S. S.** Multiple source location — a digital approach // IEEE Trans Aerospace and Electron Systems. 1979. Vol. 15, N 1, January. P. 95–105.
2. **Jonson D. H., DeGraaf S. R.** Improving The Resolution Of Bearing In Passive Sonar Arrays By Eigenvalue Analysis // IEEE Trans On Acoustic, Speech And Signal Processing. 1982. Vol. ASSP-30, N 4, August. P. 638–647.
3. **Schmidt R. O.** Multiple Emitter Location And Signal parameter Estimation // IEEE Trans. 1986. Vol. AP-34, N 3, March. P. 276–280.
4. **Ратынский М. В.** Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003. 197 с.
5. **Гантмахер Ф. П.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 559 с.
6. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 382 с.
7. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.